

I. INTEGRACIÓN POR PARTES.

Si la integración de una función no es posible encontrarla por alguna de las fórmulas conocidas, es posible que se pueda integrar utilizando el método conocido como *integración por partes*. Este método tiene como base la integración de la fórmula para la derivada de un producto de dos funciones.

Sean $u=u(x)$ y $v=v(x)$. Entonces

$$d(uv) = u dv + v du$$

o

$$u dv = uv - v du$$

Al integrar ambos miembros de esta ecuación obtenemos

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1.1)$$

Como se puede ver la *Integración por partes* es la contraparte de la regla del producto de la diferenciación, ya que el integrando en cuestión es el producto de dos funciones (por lo general). En resumen éste es el procedimiento:

Para aplicar la fórmula (1.1) en la práctica, se separa el integrando en dos partes; una de ellas se iguala a u y la otra, junto con dx a dv . Por eso se llama integración por partes. Es conveniente considerar los dos criterios siguientes.

(a) La parte que se iguala a dv debe ser fácilmente integrable.

(b) La $\int v du$ no debe de ser más complicada que $\int u dv$

Luego se aplica la fórmula de integración por partes. Este proceso convierte el integrando original - que no se puede integrar - en un integrando que si se puede integrar. Tan claro como el agua, ¿verdad?

Vas a aprender la técnica muy rápido si utilizas el acrónimo **LIATE** y el método del ejemplo de abajo:

Para seleccionar la función u , sólo tienes que ir hacia abajo en la lista del acrónimo, la primera función de la lista que coincida con una de tu integrando es la función u . El acrónimo que te ayudará a escoger tu función u es el siguiente:

Logarítmica (como $\ln x$)

Inversa trigonométrica (como $\arcsen x$)

Algebraica (como x^3 , o $2x+10$)

Trigonométrica (como $\sen 2x$)

Exponencial (como 7^{2x} , o e^{2x})

Calcular la integral $\int x^2 \ln x dx$

Tu primer reto en la integración por partes es decidir cuál es la función, (de tu integrando original), que desempeñará el papel de la u en la fórmula. He aquí cómo se hace

El integrando contiene una función logarítmica (la primera en LIATE) así que **$\ln x$** es tu función **u** , el resto **$x^2 dx$** automáticamente es **dv** .

Así pues tienes los términos son:

$$u = \ln x, \quad dv = x^2 dx$$

Pero la integral por partes contiene cuatro términos, te faltan los siguientes: **du** , y **v** . Estos los encuentras diferenciando **u** , e integrando **dv** , es decir:

$$\text{Si } u = \ln x \text{ entonces } du = \frac{1}{x} dx$$

Si $dv = x^2 dx$ entonces $v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$ Esto significa que **v** se encuentra integrando **dv** .

Ahora, ya tenemos los cuatro elementos que aparecen en la fórmula de integración por partes (1.1), sustituyendo estos valores ella entonces

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x dx &= uv - \int v du = (\ln x) \left(\frac{1}{3} x^3 \right) - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{3} x^3 + C, \text{ de donde} \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Problemas resueltos.

Ejemplo1. Calcular $\int x^3 e^{x^2} dx$

Primero reescribimos la integral así: $\int x^2 x e^{x^2} dx$. Por LIATE hacemos

$$u = x^2, \text{ y } dv = x e^{x^2}; \text{ de donde } du = 2x, \text{ y } v = \int dv = \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} (2x dx) = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

Bueno ya tenemos los elementos de la integral por partes.

$$\begin{aligned} u &= x^2 & dv &= e^{x^2} x dx \\ du &= 2x dx & v &= \frac{1}{2} e^{x^2} \end{aligned}$$

Por tanto aplicando la fórmula (1.1) se tiene

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \left\| \begin{array}{l} \text{pero la última integral} \\ \text{ya se calculó es (v)} \end{array} \right\| = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Ejemplo 2. Calcular $\int x(\sin x) dx$

Usando LIATE hacemos $u = x$, y $dv = (\operatorname{sen} x)dx$; de donde

$$du = dx, \text{ y } v = \int dv = \int (\operatorname{sen} x)dx = -\cos x$$

Aplicando la integración por partes obtenemos

$$\int x(\operatorname{sen} x)dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx = -x \cos x + \int (\cos x)dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Ejemplo 3. Calcular $\int \ln(x^2 + 4)dx$

Hacemos $u = \ln(x^2 + 4)$, y $dv = dx$; por tanto diferenciado e integrando tenemos **u**, y

$$\mathbf{v.} \quad du = \frac{1}{x^2 + 4} d(x^2 + 4) = \frac{2xdx}{x^2 + 4}, \quad v = \int dx = x$$

Por tanto

$$\int \ln(x^2 + 4)dx = x \ln(x^2 + 4) - \int (x) \frac{2xdx}{x^2 + 4} = x \ln(x^2 + 4) - \int \frac{2x^2 dx}{x^2 + 4}$$

Ahora calculamos la integral $\int \frac{2x^2 dx}{x^2 + 4}$. Recordar que $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a}$

$$\int \frac{2x^2 dx}{x^2 + 4} = \left\| \frac{2x^2}{x^2 + 4} = 2 - \frac{6}{x^2 + 4} \right\| = \int \left(2 - \frac{6}{x^2 + 4} \right) dx = 2 \int dx - 6 \int \frac{dx}{x^2 + 4} = 2x - 6 \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$$

De donde

$$\int \ln(x^2 + 4)dx = x \ln(x^2 + 4) - (2x - 6 \arctan \frac{x}{2}) + C = x \ln(x^2 + 4) - 2x + 3 \arctan \frac{x}{2} + C$$

Ejemplo 4. $\int x\sqrt{x+2}dx$

Haciendo $u = x$, y $dv = \sqrt{x+2}dx$; tendremos $du = dx$, para obtener **v** hacemos lo

$$\text{siguiente: } v = \int \sqrt{x+2}dx = \int (x+2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}. \text{ Por lo tanto}$$

$$\int x\sqrt{x+2}dx = \frac{2}{3}x(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int (x+2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{3}x(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C. \text{ De donde}$$

$$\int x\sqrt{x+2}dx = \frac{2}{3}x(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{10}{6}(x+2)^{\frac{5}{2}} + C$$

Ejemplo 5. Calcular $\int xe^{2x}dx$

Haciendo $u = x$, y $dv = e^{2x}$, encontramos

$$du = x, y v = \int e^{2x} dx = \left\| \begin{array}{l} u = 2x, du = 2dx \\ dx = \frac{du}{2} \end{array} \right\| = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{2x}. \text{ Aplicando la}$$

fórmula de integral por partes obtenemos

$$\int x e^{2x} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Ejemplo 6. $\int x^2 \cos 3x dx$. En este ejemplo se aplica la integral por partes dos veces.

Hacemos $u = x^2$, y $dv = \cos 3x dx$, por tanto

$$du = 2x dx, y v = \int \cos 3x dx = \left\| \begin{array}{l} u = 3x, du = 3dx \\ dx = \frac{du}{3} \end{array} \right\| = \int \cos u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \cos u du = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x. \text{ Por la}$$

integral por partes tenemos,

$$\int x^2 \cos 3x dx = x^2 \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - \int \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x (2x dx) = \frac{x^2 \operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{2}{3} \int x \operatorname{sen} 3x dx \quad (1.2)$$

Observa que en la integral $\int x \operatorname{sen} 3x dx$, ha bajado el exponente de la x (de 2 a 1), lo cual sugiere volver a integrar por partes así que, hacemos aquí $u = x$, y $dv = \operatorname{sen} x dx$, y en consecuencia

$$du = dx, y v = \int \operatorname{sen} 3x dx = \left\| \begin{array}{l} u = 3x, du = 3dx \\ dx = \frac{du}{3} \end{array} \right\| = \int \operatorname{sen} u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \operatorname{sen} u du = \frac{1}{3} (-\cos 3x) = -\frac{\cos 3x}{3}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} 3x dx &= x \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) - \int \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) dx = -\frac{x \cos 3x}{3} - \frac{1}{3} \int \cos 3x dx \\ &= -\frac{x \cos 3x}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \right) = -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{1}{9} \operatorname{sen} 3x \end{aligned}$$

Sustituyendo este último resultado en (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos 3x dx &= \frac{x^2 \operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{2}{3} \int x \operatorname{sen} 3x dx = \frac{2x \operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{2}{3} \left\{ -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{1}{9} \operatorname{sen} 3x \right\} \\ &= \frac{x^2 \operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{2x \cos 3x}{9} - \frac{2 \operatorname{sen} 3x}{27} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 7. Calcular $\int x^3 e^x dx$

El acrónimo LIATE nos sugiere tomar $u = x^3$, y $dv = e^x$, y por lo tanto $du = 3x^2 dx$, y $v = \int e^x dx = e^x$, así que aplicando la formula de integral por partes obtenemos

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - \int e^x (3x^2 dx) = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx \quad (1.3)$$

Observa que hemos mejorado nuestra situación, el exponente de la x bajó de 3 a 2, lo cual nos sugiere aplicar de nuevo la integral por partes a la última integral, así que hagámoslo

$$\int x^2 e^x dx = \left\| \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = e^x \\ du = 2x dx, \quad v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\| = x^2 e^x - \int e^x (2x dx) = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

Si reemplazamos éste último resultado en la ecuación (1.3) tenemos

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - \int e^x (2x^2 dx) = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 \left\{ x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \right\}$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx \quad (1.4)$$

Observa que en la última integral de la derecha el exponente de la x ahora bajó de 2 a 1, así que aplicamos de nuevo la integración por partes.

$$\int x e^x dx = \left\| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^x \\ du = dx, \quad v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

Bueno parece que ya terminamos, observa que en la última integral ya no apareció la x. Solo falta reemplazar el último resultado en la ecuación (1.4) y finalizamos.

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \{ x e^x - e^x \} + C. \text{ Por tanto}$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C$$

Ejemplo 8. Calcular $\int \arcsen x dx$

Hacemos las sustituciones

$$\left\| \begin{array}{l} u = \arcsen x, \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \int dx = x \end{array} \right\| \text{ y tenemos, } \int \arcsen x dx = x \arcsen x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Y ahora

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx = \left\| \begin{array}{l} u = 1-x^2, \quad du = -2x dx \\ dx = -\frac{du}{2x} \end{array} \right\| = \int x u^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{du}{2x} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -u^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Por lo tanto $\int \arcsen x dx = x \arcsen x - (-\sqrt{1-x^2}) + C = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C$

Ejemplo 9. Calcular $\int x \arctan x dx$.

De acuerdo con el acrónimo LIATE tomamos $u = \arctan x$, $dv = x dx$, así entonces

$du = \frac{dx}{1+x^2}$, y $v = \int x dx = \frac{1}{2} x^2$. Por lo tanto la integral por partes es

$$\int x \arctan x dx = (\arctan x) \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \quad (1.5)$$

Ahora lo único que tenemos que hacer es calcular la integral $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \left\| \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \right\| = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x$$

En conclusión reemplazando el último resultado en (1.5) obtenemos

$$\int x \arctan x dx = \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{1}{2} \{x - \arctan x\} + C = \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{x}{2} + \arctan x + C$$

Ejemplo 10. Calcular $\int \sen^2 x dx$

$$\int \sen^2 x dx = \left| \text{Para integrar separamos} \right| = \int (\sen x)(\sen x) dx$$

$$\text{Así } \left\| \begin{array}{l} u = \sen x, \quad dv = \sen x dx \\ du = \cos x dx, \quad v = \int \sen x dx = -\cos x \end{array} \right\| \text{ aplicando la integral por partes}$$

$$\int \sen^2 x dx = \sen x (-\cos x) - \int (-\cos x)(\cos x dx) = -\sen x \cos x + \int \cos^2 x dx \quad (1.6)$$

Ahora nuestro problema es calcular la integral $\int \cos^2 x dx$, sin embargo recordemos

que $\cos^2 x = 1 - \sen^2 x$, así que

$$\int \cos^2 x dx = \int (1 - \sen^2 x) dx = \int dx - \int \sen^2 x dx = x - \int \sen^2 x dx, \text{ es decir}$$

$$\int \cos^2 x dx = x - \int \sen^2 x dx, \text{ reemplacemos esta última ecuación en (1.6)}$$

$\int \sec^2 x dx = -\sec x \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sec x \cos x + x - \int \sec^2 x dx$, observa que el último término está restando, así que lo pasamos sumando al inicio de la ecuación y tenemos

$$\int \sec^2 x dx + \int \sec^2 x dx = -\sec x \cos x + x, \text{ sumamos y}$$

$$2 \int \sec^2 x dx = \sec x \cos x + x, \text{ de donde el 2 pasa dividiendo}$$

$$\int \sec^2 x dx = \frac{\sec x \cos x + x}{2} + C = \frac{x}{2} + \frac{\sec x \cos x}{2} + C$$

Ejemplo 11. Calcular $\int \sec^3 x dx$

Como en el ejemplo anterior separamos $\sec^3 x = \sec^2 x \sec x$. Por tanto $\int \sec^3 x = \int \sec^2 x \sec x dx$. La parte más complicada del integrando que resulta fácil de integrar porque conocemos una fórmula es $\sec^2 x$, por tanto tomamos

$$\left\| \begin{array}{l} u = \sec x, \quad dv = \sec^2 x dx \\ du = \sec x \tan x dx, \quad v = \int \sec^2 x dx = \tan x \end{array} \right\| \text{Aplicando la integral por partes se tiene}$$

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \tan x (\sec x \tan x dx) = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \quad (1.7)$$

Así que sólo nos queda resolver la integral $\int \sec x \tan^2 x dx$. Manos a la obra

$$\begin{aligned} \int \sec x \tan^2 x dx &= \left\| \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \right\| = \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int (\sec^3 x - \sec x) dx = \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx \end{aligned}$$

Este último resultado lo reemplazamos en la ecuación (1.7)

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx = \sec x \tan x - \left\{ \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx \right\} \text{ de donde}$$

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \ln |\sec x + \tan x|,$$

observa que $\int \sec^3 x dx$ está restando, así que lo pasamos sumando al primer término y tenemos

$$\int \sec^3 x dx + \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|, \text{ sumando}$$

$$2 \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| \text{ y finalmente}$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|}{2} + C = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{\ln |\sec x + \tan x|}{2} + C$$